

Wstęp

*Po co ludzie uczą się matematyki?
Żeby uczyć matematyki innych.*

Hugo Steinhaus

Książka przeznaczona jest dla studentów kierunku Kształcenie wczesnoszkolne i wychowanie przedszkolne do przedmiotu *Edukacja matematyczna z metodyką* oraz studentów innych kierunków, którzy wybrali edukację wczesnoszkolną jako drugą specjalizację. Może być również użyteczna dla nauczycieli przedszkoli i nauczycieli kształcenia zintegrowanego, nazywanego czasem edukacją elementarną bądź kształceniem wczesnoszkolnym, lub też nauczaniem początkowym.

Książka jest zbiorem wykładów, jakie prowadziłem dla studentów kształcenia zintegrowanego w PWSZ w Raciborzu i zawiera podstawy edukacji matematycznej z elementami metodyki, tym samym nie wyczerpuje zagadnienia i nie powinna być traktowana jako poradnik metodyczny dający pełną wiedzę dla przyszłego nauczyciela. Konieczne jest uzupełnianie i poszerzanie swoich umiejętności, korzystając z bogatej literatury książkowej, artykułów w czasopismach i opracowań coraz częściej zamieszczanych w Internecie. Czasem obok standardowego wykładu mogą się znaleźć fragmenty mające charakter pewnych uwag, refleksji. Można je pominąć bez szkody dla wiedzy, ale zachęcam do przeczytania ich, bowiem wpływają z doświadczenia i przemyśleń wynikających z dyskusji z nauczycielami.

Książka zawiera wykład podstaw matematyki niezbędnych studentowi i nauczycielowi. Nie znaczy to jednak, że prezentowane tu treści są przeznaczone do realizacji w klasach początkowych. Są to jednak treści niezbędne nauczycielowi, który musi wiedzieć znacznie więcej niż uczeń. Nauczyciel powinien umieć spojrzeć na matematykę w klasach początkowych oczami matematyka i zawsze odpowiedzieć sobie na pytania: *Po co tego uczyć?* Czy przekazywane wiadomości i umiejętności będą dla niego zrozumiałe i będą uczniowi niezbędne, czy mają charakter wspomagający – służą tylko przygotowaniu ucznia do poznawania innych ważnych treści, a może mają charakter propedeutyczny i dopiero w dalszej edukacji będą poznawane dokładniej?

23 sierpnia 2007 roku Ministerstwo Edukacji Narodowej wprowadziło zmianę *Podstawy programowej kształcenia w profilach kształcenia ogólnozawodowego*, z mocą obowiązującą od 1 września. *Podstawa* jest podstawowym dokumentem wyznaczającym kierunki edukacji szkolnej. W stosunku do *Podstawy* obowiązującej jeszcze w roku szkolnym 2006/07, pewne treści zostały przesunięte do realizacji w przedszkolu, np. *ćwiczenia związane z orientacją w przestrzeni i wzajemnym położeniem przedmiotów*, inne do klas starszych szkoły podstawowej, jak np. *działania pisemne, rozwiązywanie zadań tekstowych złożonych*. Wszystkie te treści są jednak uwzględnione w niniejszym opracowaniu, bowiem nie przekraczają one możliwości ucznia kształcenia zintegrowanego i mogą być realizowane w ramach tzw. rozszerzenia lub w np. na kółku matematycznym.

Opracowanie nie zaspokoi w pełni potrzeb nowoczesnego nauczyciela, ale, mam nadzieję, że dostarczy niezbędnej pomocy do poprawnej pracy dydaktycznej i pokaże sposoby doskonalenia swoich umiejętności przez korzystanie z różnych źródeł informacji. Zachęcam do korzystania z licznych opracowań metodycznych poszczególnych tematów, które można znaleźć m.in. w drukowanych opracowaniach metodycznych oraz w Internecie, a których spora lista jest zamieszczona w wykazie literatury. Zachęcam do poszukiwania również własnych rozwiązań, zwłaszcza dotyczących tzw. aktywizacji matematycznej ucznia poprzez stosowanie zabaw i gier matematycznych, rozwiązywanie łamigłówek logicznych i matematycznych, pamiętając o doborze stosownym do wieku ucznia, posiadanej przez niego wiedzy, zaawansowania w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

Zawarte w książce wskazówki metodyczne mogą pomóc w realizacji wybranych treści matematycznych w klasach I-III oraz w przedszkolu. Niektóre problemy zostały tylko zasygnalizowane i wymagają samodzielnego szerszego poznania z bogatej literatury.

Aby swobodnie i dobrze uczyć dzieci, niezbędna jest wiedza pedagogiczna i psychologiczna poznawana podczas studiów.

Podziękowania!

Dziękuję serdecznie pani prof. dr hab. Gabrieli Kapicy za umożliwienie przygotowania książki i stałą zachętę do pracy nad nią.

Paniom dr Renacie Reclik, Krystynie Wojciechowskiej i Aleksandrze Urban dziękuję za cierpliwość i przeczytanie „całości w kawałkach”. Cenne uwagi oraz rady, którymi zechciały Panie podzielić się ze mną, wpłynęły na postać tego opracowania.

Mojej żonie Krystynie dziękuję za wsparcie duchowe, cierpliwe wysłuchiwanie moich wątpliwości i cenne porady i odpowiedzi oraz wielokrotne czytanie połączone z walką o właściwe miejsca dla przecinków i nie tylko.

Szczególne podziękowania składam Pani prof. dr hab. Jadwidze Hanisz za wskazówki, które pozwoliły nadać tej pracy ostateczny kształt.

Jerzy Nowik

Wstęp do wydania II

W roku 2009 wprowadzona została reforma systemu oświaty, polegająca m.in. na stopniowym objęciu obowiązkiem szkolnym dzieci od 6 roku życia i zmianie treści nauczania. Minister Edukacji Narodowej 23 grudnia 2008 roku zatwierdziła zmianę *Podstawy programowej kształcenia w profilach kształcenia ogólnozawodowego*, z mocą obowiązującą od 1 września 2009. *Podstawa* jest dokumentem wyznaczającym kierunki edukacji szkolnej. W stosunku do *Podstawy* obowiązującej jeszcze w roku szkolnym 2008/09 pewne treści zostały przesunięte do realizacji w przedszkolu, np. ćwiczenia związane z orientacją w przestrzeni i wzajemnym położeniem przedmiotów, inne do klas starszych szkoły podstawowej, jak np. działania pisemne, rozwiązywanie zadań tekstowych złożonych. Wszystkie te treści są jednak uwzględnione w niniejszym opracowaniu, bowiem nie przekraczają one możliwości ucznia kształcenia wczesnoszkolnego i mogą być realizowane w ramach tzw. rozszerzenia lub w np. na kółku matematycznym.

W załączniku nr 1. zamieszczona jest *Podstawa programowa wychowania przedszkolnego*, a w załączniku nr 2. *Podstawa programowa dla klas I-III*, z której wybrane zostały treści matematyczne oraz z zakresu zajęć komputerowych. Pełny tekst obowiązującej *Podstawy* jest zamieszczony na stronie internetowej Ministerstwa Edukacji Narodowej

http://bip.men.gov.pl/akty_prawne

1. Początki myślenia matematycznego u dziecka

1. *Jesteś w stanie myśleć matematycznie.*
2. *Matematyczne myślenie można **usprawnić** dzięki praktyce połączonej z refleksją.*
3. *Matematyczne myślenie **provokują** sprzeczności, napięcia i niespodzianki.*
4. *Matematycznemu myśleniu **sprzyja** atmosfera swobodnego zadawania pytań, rzucania wyzwań i refleksji.*
5. *Matematyczne myślenie pomaga w **zrozumieniu** siebie i świata.*

J. Mason: Matematyczne myślenie

Na wstępie zastanówmy się nad tym, co to jest myślenie matematyczne, na które niejednokrotnie się powołujemy. Myślenie lub rozumowanie to złożony proces umysłowy, polegający na poszukiwaniu zależności między pojęciami i wnioskowaniu. Operuje zatem elementami pamięci oraz umiejętnościami i prawie zawsze wiąże się z tworzeniem nowej wiedzy, czyli rozwojem człowieka myślącego, a o człowieku myślącym, mówimy często jako o człowieku inteligentnym. W nauczaniu matematyki często mówimy o myśleniu matematycznym. Czy różni się ono istotnie od „zwykłego” myślenia?

Specyfika **myślenia matematycznego** polega na myśleniu konkretnym opartym na określonych założeniach, prawach logicznych – definicjach, twierdzeniach, a jednocześnie stawianiu pytań – hipotez, choć nie zawsze można na nie odpowiedzieć. Wymaga umiejętności analizowania i syntetyzowania. Logiczne myślenie, które jest często utożsamiane z myśleniem matematycznym, potrzebne jest w każdej dziedzinie nauki, która wymaga umiejętności kojarzenia faktów i ich wzajemnej zależności. Jest ono pozbawione emocji, które często towarzyszą w tzw. myśleniu twórczym malarzy czy poetów, ale nie znaczy to, że jest pozbawione wyobraźni, która zawsze towarzyszy procesom abstrahowania.¹

Psychologicznymi mechanizmami twórczości naukowej, rozpatrywanymi na przykładzie myślenia matematycznego zajmował się Jacques Hadamard, a swoje doświadczenia o tym jak przebiegają procesy myślowe podczas rozwiązywania problemów matematycznych opisał w książce *Psychologia odkryć matematycznych*.²

Czynnościowe nauczanie matematyki³

Operatywny charakter matematyki i psychologiczna koncepcja interioryzacji wskazują dydaktyce matematyki specyficzną drogę od konkretnego do abstrakcji matematycznej, drogę, którą nazywać będziemy **czynnościowym nauczaniem matematyki**. Punktem wyjścia dla takiego nauczania jest stwierdzenie, że:

1. Typowe elementarne struktury matematyczne są związane z pewnymi, również typowymi operacjami, których konkretne źródła dostrzegamy już w prymitywnych czynnościach dziecka.

Przykładem takiej struktury algebraicznej jest działanie, którego konkretną genezą jest porządkowywanie parom przedmiotów przedmiotu trzeciego – struktura przedmiotowa, np. działanie na klockach, a także ustalenie relacji porządkowych w abstrakcyjnych zbiorach dla której genezą jest porządkowanie konkretnego zbioru, itp.

¹ J. Mason, L. Burton, K. Stacey: *Matematyczne myślenie*. WSiP, Warszawa 2005

² J. Hadamard: *Psychologia odkryć matematycznych* PWN, Warszawa 1964

³ Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki*. Cz. 1. PZWS, Warszawa 1977

2. Każda sytuacja w matematyce elementarnej nasuwa potrzebę wykonywania różnych, specyficznych dla rozważanej dziedziny operacji abstrakcyjnych i towarzyszących im konkretnych zupełnie czynności, których rola jest rozmaita: czasem stanowią one pobudzenie jakiejś myślowej czynności, czasem ją tylko podpierają, ustalając to, co jest w myśli chwiejne, czasem ją tylko wyrażają (rysunek, zapis, spontanicznie tworzony model, gest itp.).

Dobór i organizowanie czynności konkretnych w różnych sytuacjach jest ważnym zagadnieniem dydaktycznym. Na przykład dydaktyczna analiza liczby naturalnej w ujęciu mnogościowym wysuwa na plan pierwszy dwie operacje: wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie elementów dwóch zbiorów oraz porządkowania zbioru liczb naturalnych. w tym ujęciu liczba może być traktowane jako skończona liczba kardynalna lub jako skończona liczba porządkowa.

Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażonych do operacji abstrakcyjnych. Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się więc:

1. na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie. Wyrazem tego jest taksonomia celów nauczania, a w konsekwencji dydaktyczne plany wynikowe;

2. na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu, m.in. przez:

a) wiązanie treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania (definicje genetyczne, jak to zbudować, jak zrobić, jak wykorzystać),

b) wiązanie operacji z operacjami odwrotnymi (dodawanie i odejmowanie ilustrowane np. z użyciem grafów),

c) wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy (przemienność działań, klocki – liczby),

d) uwzględnienie różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego rezultatu (czynnościowa interpretacja dwustronna wzorów algebraicznych i trygonometrycznych, itp.),

e) stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych (przekształcanie schematu lub tworzenie nowego),

f) opis słowny operacji (co robię),

g) właściwe i celowe wiązanie czynności konkretnych z myślowymi operacjami, przy czym czynność konkretna może być:

g') źródłem procesu interioryzacji – operacja myślowa,

g'') wykonywana równoległe z operacjami myślowymi – wpieranie operacji myślowych,

g''') weryfikacją w konkretności efektywności pomyślanego ciągu operacji,

h) konsekwentne uczenie swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami i przyzwyczajanie ucznia do tego, że tylko określone, planowe działanie, a nie bierna kontemplacja i oczekiwanie na „natchnienie” prowadzi do rozwiązania zagadnienia (praca z ołówkiem i kartką podczas lektury),

i) zwrócenie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter operatywny, aby wizualnie sugerowała operację (grafy, drzewka, strzałki, itd.).

Uwagi te, sformułowane przez Zofię Krygowską, wskazują tylko kierunek poszukiwań dydaktycznych otwartych dla każdego nauczyciela. Celem tych poszukiwań jest racjonalne uczenie myślenia matematycznego jako naturalnego działania w abstrakcji.

Podobnie jak działanie w praktyce jest oparte na systemie podstawowych prostych specyficznych czynności elementarnych, przyswajanych przez dziecko w toku jego doświadczeń i wychowania, tak i działanie w abstrakcji matematycznej jest oparte na systemie podstawowych specyficznych operacji myślowych. Tych operacji trzeba świadomie i planowo uczyć poczynając od pierwszego kontaktu dziecka z matematyką⁴.

Rozwój myślenia matematycznego u dziecka

Dziecko w 7 roku życia wstępując do szkoły znajduje się na przełomie dwóch stadiów rozwoju psychicznego, zwanych dawniej drugim i trzecim dzieciństwem, a obecnie określanym jako wiek przedszkolny i szkolny. Miernikiem przejścia do tego drugiego okresu jest osiągnięcie przez dziecko tzw. dojrzałości szkolnej, a więc takiego stopnia rozwoju psychicznego i fizycznego, który czyni je podatnym i wrażliwym na oddziaływanie szkoły, umożliwiając regularną naukę w klasie. Charakteryzuje się to m.in. opanowaniem umiejętności ruchowych dłoni i palców – pisanie, zdobyciem pewnej wiedzy o otaczającym świecie, umiejętnością porozumiewania się, osiągnięciem pewnego stopnia uspołecznienia i działania intencjonalnego (skierowanego na wynik), umiejętność opanowania emocji.

W okresie poprzedzającym wiek szkolny, od niemowlęctwa, za punkt wyjścia przyjmuje się w rozwoju myślenia konkretne czynności powtarzane jako reakcje na bodźce zewnętrzne, co prowadzi do wytworzenia się schematów postępowania, które dziecko stosuje niezależnie od sytuacji. Piaget nazywa to **asymilacją** rzeczywistości do danego schematu. Napotykając sytuacje, które nie dadzą się zasymilować do przyswojonego schematu, zmienia się schemat postępowania, dostosowując go do rzeczywistości, czyli **akomodując** go. Przykładem jest chwytanie przez dziecko małej zabawki otwartą dłonią, a gdy damy dziecku większą zabawkę, która nie mieści się w dłoni, dziecko wyrabia odruch chwytania obiema rękami.

W postępującym procesie asymilacji i akomodacji pierwotne czynności koordynują się, stają się bardziej złożone, tym samym dziecko uczy się bardziej elastycznego stosowania już przyswojonych planów postępowania do sytuacji nowych.

To, co obserwujemy w postaci prymitywnej w okresie niemowlęcym, występuje również w postaci bardziej złożonej na poziomie wysokiej abstrakcji.

Przykład

Uczeń poznał zasadę rozwiązywania równania z dodawaniem:

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2.$$

Rozwiązując równanie z mnożeniem, czasem uczeń postępuje w sposób dokładnie taki sam:

$$x * 2 = 6$$

$$\boxed{x = 6 - 2}$$

Jest tu potrzebna natychmiastowa ingerencja nauczyciela pokazującego związki między działaniami wzajemnie odwrotnymi, aby uczeń mógł wybrnąć z błędu i podać poprawne rozwiązanie:

$$x = 6 : 2$$

Uczeń zastosował schemat, a powinien znając związki między działaniami wzajemnie odwrotnymi zastosować analogię. Współczesna dydaktyka poświęca wiele uwagi uczeniu się przez analogię podkreślając jej znaczenie dla procesu uczenia się, m.in. na egzaminie maturalnym stosowane są zadania wymagające rozwiązania problemu, przez analogię.

Rozpatrzmy jeszcze przykład związany z etapami kształtowania się pojęcia długości odcinka.

⁴ Siwek H.: *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998